交作业时间: 2020年10月26日，星期一

1. 计算向量场 $\mathbf{a} = \mathbf{grad}\left(\arctan \frac{y}{x}\right)$ 沿下列定向曲线的环量:

   (1) 圆周 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1, z = 0$, 从 z 轴的正向看去为逆时针方向;

   (2) 圆周 $x^2 + y^2 = 4, z = 1$, 从 z 轴的正向看去顺时针方向.

2. 计算向量场 $\mathbf{r} = xyz(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ 在点 $M(1,3,2)$ 处的旋度, 以及在这点沿方向 $\mathbf{n} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 的环量面密度.

3. 设 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ 为向量场, $f(x,y,z)$ 为数量场, 证明: (假设函数 a_1, a_2, a_3 和 f 具有必要的连续偏导数)

   (1) $\mathrm{div}(\mathbf{rot}\ \mathbf{a}) = 0$;

   (2) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ f) = 0$;

   (3) $\mathbf{grad}(\mathrm{div}\ \mathbf{a}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\ \mathbf{a}) = \Delta\mathbf{a}$.

4. 位于原点的点电荷 q 产生的静电场的电场强度为 $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ε_0 为真空介电常数. 求 $\mathbf{rot}\ \mathbf{E}$.

5. 设 $\mathbf{a}$ 为常向量, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 验证:

   (1) $\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = 0$;

   (2) $\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$;

   (3) $\nabla\cdot((\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a}) = 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}$.

6. 求全微分 $(x^2-2yz)\mathrm{d}x + (y^2-2xz)\mathrm{d}y + (z^2-2xy)\mathrm{d}z$ 的原函数.

7. 证明向量场 $\mathbf{a} = \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ $(x>0)$ 是有势场并求势函数.

8. 验证:

   (1) $u = \ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 为 $\mathbf{R}^2\backslash\{(a,b)\}$ 上的调和函数;

(2) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为 $\mathbf{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ 上的调和函数.

9. 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上具有二阶连续偏导数, 证明 u 是调和函数的充要条件为: 对于 $\mathbf{R}^2$ 中任意光滑封闭曲线 C, 成立 $\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$, 其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿 C 的外法线方向的方向导数.

10. 设 $B=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$, $\mathbf{F}(x,y,z):\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 为具有连续导数的向量值函数, 且满足

$$\mathbf{F}\mid_{\partial B}\equiv(0,0,0),\quad \nabla\cdot\mathbf{F}\mid_B\equiv 0.$$

证明: 对于任何 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数的函数 $g(x,y,z)$ 成立

$$\iiint\limits_B \nabla g\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x=0.$$

11. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2<1\}$, $u(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上具有连续二阶偏导数. 进一步, 设 u 在 $\bar{D}$ 上不恒等于0, 但在 D 的边界 ∂D 上恒为0, 且在 D上成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u,\quad (\lambda \text{ 为常数}).$$

证明:

$$\iint\limits_D \|\,\mathbf{grad}u\,\|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\lambda\iint\limits_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

12. 设区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 所围成, $u(x,y,z)$ 在$\bar{\Omega}$ 上具有二阶连续偏导数, 且在 $\bar{\Omega}$ 上调和, 即满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

(1) 证明

$$\iint\limits_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=0,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 Σ 的单位外法向量;

(2) 设 $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ 为一定点, 证明

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_\Sigma\left(u\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S,$$

其中 $\mathbf{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, $r=|\mathbf{r}|$.